数理解析研究所講究録 1200 巻 2001 年 48-59

K_2-VERSION OF COLEMAN POWER SERIES AND P-ADIC ZETA FUNCTIONS OF MODULAR FORMS

東大数理　　深谷　太香子 (TAKAKO FUKAYA)
(学術振興会特別研究員 PD)
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES
UNIVERSITY OF TOKYO
(JSPS RESEARCH FELLOW PD)

CONTENTS

1. 序

p を素数とする．p 進数体 $\mathbb{Q}_p$ の p 巾円分拡大に対する norm 系を捉える理論として，Coleman 氏 [Co] による Coleman 巾級数の理論がある．この理論に円単数（zeta element）の系を適用する事により，Riemann ゼータ関数の p 進解析関数版である，p 進 Riemann ゼータ関数が得られる事が知られている．

この Coleman 巾級数の理論は，実は p 進数体に限らず，剰余体が完全な混標数を持つ完備離散付値体で，絶対不分岐なもの一般に対し成り立つ理論である．しかし，剰余体が非完全な場合には適用されない．

筆者は剰余体が非完全な場合にも，対応する理論をつくり，応用を得る事を試みた．本稿の目的は，混標数 $(0,p)$ を持つ完備離散付値体で，その剰余体 k が条件 $[\mathsf{k}:\mathsf{k}^p]=p$ を満たす（剰余体は非完全体) ものに対し，Coleman 巾級数の理論に対応する理論と，その応用を与えることである．この場合に Coleman 巾級数の理論に対応するものとして構成したものは,「K_2 版の Coleman 巾級数の理論」である．これについて §2 で述べる．また円単数の系に対応する系として，加藤和也氏による「保型形式のゼータ関数に対応する zeta element の系」を用い，これを「K_2 版の Coleman 巾級数」に適用する事により，保型形式の複素 L 関数の p 進解析関数版である保型形式の p 進 L 関数を得た．これについて §3 で述べる．

著者は日本学術振興会の援助をいただいております（特別研究員 PD）.

この研究について発表の機会を頂いた事に対し深く感謝申し上げる．またこの研究全般に対し御指導下さった加藤和也先生に心からの感謝を申し上げる．

2. Coleman 巾級数

本章ではすでに知られているColeman巾級数の存在定理についての復習と，今回の「K_2版のColeman巾級数」の存在定理について論じる．

混同を避けるため以下の表記を用いる．

H: 混標数$(0,p)$をもつ完備離散付値体で剰余体kが完全であるもの．つまりkが$[k:k^p]=1$を満たすもの．

H: 混標数$(0,p)$をもつ完備離散付値体で剰余体kが$[\mathsf{k}:\mathsf{k}^p]=p$を満たすもの．

ここで仮定としてH, Hは共に絶対不分岐，つまりpがそれぞれの素元であるとする．

Coleman巾級数の理論は，通常p進数体$\mathbb{Q}_p$などの剰余体が有限体の体に対し与えられているが，もっと一般にHのような剰余体が完全な，混標数完備離散付値体に対し与える事のできる理論である．

これに対し，今回の「K_2版のColeman巾級数」はHに対する理論である．

H の例としては，p進数体$\mathbb{Q}_p$やその有限次不分岐拡大体がある．

Hの例としては$\varprojlim_n(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[[q]][1/q])[1/p]$がある．ここに$q$は変数である．

「K_2版のColeman巾級数」では，このqのように，剰余体kへの像がk^p上kを生成するもの（$\mathsf{k}=\mathsf{k}^p[q \bmod (p)]$なるもの）を一つ固定して考える．

項 2.1–2.2 で H に対して与えられている通常の Coleman 巾級数の理論 (classical case と呼ぶ事にする）を振り返り，項2.3–2.4でHに対して与えられる今回の「K_2版のColeman巾級数」の理論を述べる．

2.1. classical caseを振り返る．まずは設定をする．各$n\geq 1$に対し1の原始p^n乗根ζ_{p^n}を，$\zeta_{p^{n+1}}^p=\zeta_{p^n}$を満たす様に取り, 固定する．更に，$O_H$上の形式巾級数環$O_H[[\varepsilon-1]]$に対し，連続準同型

$$\varphi,\sigma: O_H[[\varepsilon-1]]\longrightarrow O_H[[\varepsilon-1]],$$

を次で特徴付けられるものとして定義する．

$$\varphi|_{O_H}=\sigma|_{O_H}=\text{Frobenius of } O_H: O_H\longrightarrow O_H,$$

$$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^p, \quad \sigma(\varepsilon) = \varepsilon.$$

次の定理がColeman氏によるColeman巾級数の存在についての主定理である．

定理 2.2 (Coleman [Co])．乗法群の間の標準群同型が次のように存在する．

$$(O_H[[\varepsilon - 1]]^\times)^{\mathrm{N}_\varphi = 1} \xrightarrow{\cong} \varprojlim_n O_{H_n}^\times,$$

ここに左辺の$(O_H[[\varepsilon-1]]^\times)^{\mathrm{N}_\varphi=1}$は$\varphi$の*norm* N_φが1で作用する$O_H[[\varepsilon-1]]^\times$の部分群である．右辺の逆極限$\varprojlim_n O_{H_n}^\times$は*norm*写像によって与えらる．同型は$f(\varepsilon) \in (O_H[[\varepsilon - 1]]^\times)^{\mathrm{N}_\varphi=1}$に対し

$$f(\varepsilon) \mapsto ((\sigma^{-n} f)(\zeta_{p^n}))_n \tag{2.1}$$

と与えられる．

norm系の群$\varprojlim_n O_{H_n}^\times$の群がどのようなものであるか，という問題に興味は沸くが，答えは簡単にはわからない．それをこの定理はnorm系の群は$(O_H[[\varepsilon - 1]]^\times)^{\mathrm{N}_\varphi=1}$という比較的わかりやすい群に標準的に同型である事を示している．この様に，Colemanの定理にはnorm系の群を捉える理論としての意義がまずはある．

元$x \in \varprojlim_n O_{H_n}^\times$に対し定理2.2の同型により対応する$(O_H[[\varepsilon - 1]]^\times)^{\mathrm{N}_\varphi=1}$の元を$x$に対応するColeman 巾級数と呼ぶのである．

注 2.2.1 ．環Aと0以上の整数iに対し代数的K群と呼ばれるアーベル群$K_i(A)$ (*Quillen* [Qu]) が定義される．$A = O_{H_n}$や$A = O_H[[\varepsilon - 1]]$の場合$K_1(A) = A^\times$となる事から，定理2.2は$K_1$版の*Coleman*巾級数の理論と見る事ができる．

2.3. これまでに述べた「Coleman巾級数」の理論を，我々が考える体Hに対し構成する事を考える．この場合は定理2.2の様に乗法群のままの設定で行うとうまくいかない．次数2の代数的K群, K_2群を考え，以下のような設定をするとうまくいく事がわかった．

設定をする．各$n \geq 1$について1の原始p^n乗根ζ_{p^n}を$\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$を満たす様に取り固定する．更にこの場合は$\mathsf{k}$の$p$-baseの持ち上げ$q \in O_{\mathsf{H}}$を取り固定する．($p$-baseの持ち上げとは，$\mathsf{k} = \mathsf{k}^p[q \bmod (p)]$を満たす$O_{\mathsf{H}}$の元

q の事を言う.）その上，各 $n \geq 1$ について，H のある代数閉包 $\bar{\mathsf{H}}$ の元，q の p^n 乗根 q^{1/p^n} も $(q^{1/p^{(n+1)}})^p = q^{1/p^n}$ を満たす様に取り，固定する.（我々の「K_2 版の Coleman 巾級数」の理論は，この様に p-base の持ち上げを決める毎に与えられる理論である.）

更に，O_{H} 上の形式巾級数環 $O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon - 1]]$ に対し，連続準同型

$$\varphi, \sigma : O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon - 1]] \longrightarrow O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon - 1]],$$

を次で特徴付けられるものとして定義する.

まず φ, σ の O_{H} への制限は次の 2 つの条件 (i) (ii) で特徴付けられる.

(i) modulo (p) をする事で導かれる準同型

$$\varphi = \sigma : \mathsf{k} \longrightarrow \mathsf{k}$$

は p 乗写像に一致する.

(ii)

$$\varphi(q) = q^p, \quad \sigma(q) = q.$$

更に

$$\varphi(\varepsilon) = \varepsilon^p, \quad \sigma(\varepsilon) = \varepsilon.$$

準同型 φ, σ はこれらの条件によって特徴付けられる連続準同型である.

次の定理が K_2 版の Coleman 巾級数の存在についての主定理である.

定理 2.4 ([Fu1]). 標準群同型が次の様に存在する.

$$\hat{K}_2(O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon - 1]])^{\mathrm{N}_\varphi = 1} \xrightarrow{\cong} \varprojlim_n \hat{K}_2(O_{\mathsf{H}_n}).$$

ここに，左辺の $\hat{K}_2(O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon - 1]])^{\mathrm{N}_\varphi = 1}$ は φ の *norm* N_φ が 1 で作用する $\hat{K}_2(O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon - 1]])$ の部分群である．右辺の逆極限 $\varprojlim_n \hat{K}_2(O_{\mathsf{H}_n})$ は K_2 群の *norm* 写像によって与えられる．また，各 K_2 群に対し，$\hat{K}_2$ はある種の完備化をあらわす．(この完備化については [Fu1] を参照されたい．) 更に群同型は，環準同型 $(n \geq 1)$

(2.2) $$O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon - 1]] \longrightarrow O_{\mathsf{H}_n} \ ; \ f(\varepsilon) \mapsto (\sigma^{-n} f)(\zeta_{p^n})$$

$(f(\varepsilon) \in O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon - 1]])$ より導かれる K_2 群の準同型によってもたらされる. ここに σ^{-n} は次によって特徴付けられる環準同型 $O_{\mathsf{H}} \to O_{\mathsf{H}(q^{1/p^n})}$ である：$\sigma^{-n}(q) = q^{1/p^n}$，また導かれる準同型 $\sigma^{-n} : \mathsf{k} \to \mathsf{k}(q^{1/p^n} \bmod (p))$ は p^n 乗写像 $\sigma^n : \mathsf{k}(q^{1/p^n} \bmod (p)) \xrightarrow{\cong} \mathsf{k}$ の逆写像である.

注 2.4.1 . 定理2.4は定理2.2のK_2版，になっている事が写像(2.2)を写像(2.1)と比較する事によってわかる．定理2.4はK_2版の*Coleman*巾級数と呼ばれるべきものである．

3. p進L関数への応用

Coleman巾級数にはさまざまな応用があるが，ここではp進L関数への応用に焦点を当てる．まず，classical caseで，Coleman巾級数がp進Riemannゼータ関数の構成に応用された結果を振り返り，次に我々のK_2版の理論について述べる．

3.1. 項3.1–3.2では，classical caseにおける応用を振り返る．以下では$H = \mathbb{Q}_p$とする．複素Riemannゼータ関数$\zeta(s)$のp進関数版であるp進Riemannゼータ関数$\zeta_{p\text{-adic}}$は岩澤氏により，完備群環$O_H[[G_\infty]] = \varprojlim_n O_H[(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times]$の全商環の元としてとらえられる事が示された．([Iw]に詳しい.) 項3.1–3.2の目的は，このp進Riemannゼータ関数$\zeta_{p\text{-adic}}$を，Coleman巾級数の理論に円単数の系を適用する事で得る事である．

まず次の合成写像を考える．

$$
\begin{aligned}
&\varprojlim_n O_{H_n}^\times \xrightarrow{\cong} (O_H[[\varepsilon-1]]^\times)^{\mathrm{N}_\varphi=1} \\
(3.1)\qquad &\xrightarrow{d\log} \Omega^1_{O_H[[\varepsilon-1]]} = O_H[[\varepsilon-1]]\cdot d\log(\varepsilon) \\
&\xrightarrow{\cong} O_H[[\varepsilon-1]] \\
&\longrightarrow O_H[[G_\infty]].
\end{aligned}
$$

最初の同型は定理2.2によって与えられるものである．また$\Omega^1_{O_H[[\varepsilon-1]]}$は，$\Omega^1_{O_H[[\varepsilon-1]]/\mathbb{Z}}$は絶対微分形式の加群に対し，

$$\Omega^1_{O_H[[\varepsilon-1]]} = \varprojlim_n \Omega^1_{O_H[[\varepsilon-1]]/\mathbb{Z}}/p^n\Omega^1_{O_H[[\varepsilon-1]]/\mathbb{Z}},$$

とする．写像$d\log$は

$$a \mapsto \frac{da}{a},$$

で与えられる写像である．更に，$a \in \mathbb{Z}_p^\times$に対し，対応する$G_\infty$の元を$\sigma_a$と書く事にする．最後の写像は

$$\varepsilon^a \mapsto \begin{cases} a^{-1}\sigma_a & \text{if } (a,p)=1 \\ 0 & \text{if } (a,p)\neq 1 \end{cases}$$

に伴うO_H-加群の準同型である．

3.2. 整数cで$(c,p)=1$を満たすものを固定する．円単数の系を次のように定義する：

$$\left(\frac{1-\zeta_{p^n}^c}{1-\zeta_{p^n}}\right)_n \in \varprojlim_n O_{\mathsf{H}_n}^\times$$

([Ka1], §1.1参照)．円単数の系の，合成(3.1)による像が

$$(1-\sigma_c)\zeta_{p-\mathrm{adic}}$$

となる事が示される．

こうしてColeman巾級数の理論を用いて自然に定義された写像に，円単数の系というzeta elementを適用する事で，p進Riemannゼータ関数$\zeta_{p-\mathrm{adic}}$が得られた．

我々はこの理論のK_2版を考える．

3.3. K_2版のColeman巾級数のp進L関数への応用について述べる．この場合は，加藤和也氏による保型形式のゼータ関数に対応するzeta elementを，K_2版のColeman巾級数を用いて定義する自然な写像に適用し，保型形式のp進L関数を得る．

整数$N\geq 1$で$(N,p)=1$満たすものを固定する．以下では$\mathsf{H}=\varprojlim_n(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[[q]][1/q])[1/p](\zeta_N)$ $(O_{\mathsf{H}}=\varprojlim_n(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}[[q]][1/q])[\zeta_N])$とおく．ここに$\zeta_N$は1の原始$N$乗根である．

乗法群の場合の類似を辿り，K_2版Coleman巾級数を用いた次の合成写像を考える．

$$
\begin{aligned}
&\varprojlim_n \hat{K}_2(O_{\mathsf{H}_n}) \xrightarrow{\cong} \hat{K}_2(O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]])^{\mathrm{N}_\varphi=1}\\
(3.2)\qquad &\xrightarrow{d\log} \Omega^2_{O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]]} = O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]]\cdot d\log(q)\wedge d\log(\varepsilon)\\
&\xrightarrow{\cong} O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]]\\
&\longrightarrow O_{\mathsf{H}}[[G_\infty]]
\end{aligned}
$$

最初の同型は定理2.4によるものである．また$\Omega^2_{O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]]}$は，絶対微分形式の加群$\Omega^1_{O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]]/\mathbb{Z}}$と$\Omega^2_{O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]]/\mathbb{Z}}=\bigwedge^2_{O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]]}\Omega^1_{O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]]/\mathbb{Z}}$に対し，

$$\Omega^2_{O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]]} = \varprojlim_n \Omega^2_{O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]]/\mathbb{Z}}/p^n\Omega^2_{O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]]/\mathbb{Z}}$$

である．写像 $d\log$ は

$$\{a,b\} \mapsto \frac{da}{a} \wedge \frac{db}{b}$$

$(a,b \in O_{\mathsf{H}}[[\varepsilon-1]]^{\times})$, $\{a,b\}$ は symbol で特徴付けられる写像である．更にアーベル群 A に対し $A[[G_\infty]]$ を $\varprojlim_n A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times]$ とする．また $a \in \mathbb{Z}_p$ に対し，対応する G_∞ の元を σ_a と表す．最後の写像は

$$\varepsilon^a \mapsto \begin{cases} a^{-1}\sigma_a & \text{if } (a,p)=1 \\ 0 & \text{if } (a,p)\neq 1 \end{cases}$$

に伴う O_{H}-加群の準同型である．

classical case にならって，classical case での円単数に相当する zeta element をこの合成写像に適用する．この場合の zeta element について次に述べる．

3.4. 我々の場合の zeta element の定義をする．

3.4.1. 整数 $\mathcal{M},\mathcal{N} \geq 1$ で $\mathcal{M}+\mathcal{N} \geq 5$ を満たすものに対し, $Y(\mathcal{M},\mathcal{N})$ を次の functor を表現する $\mathbb{Q}$ 上の modular curve とする：

$S \mapsto$(組 $(E,\ \iota)$ の同型類の集合;

ここに E は S 上の楕円曲線，そして ι は

S 上の群スキームの単射準同型 $\mathbb{Z}/\mathcal{M}\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\mathcal{N}\mathbb{Z} \longrightarrow E$).

整数 $c,d \geq 1$ で $(c,6p)=(d,6Np)=1$ を満たすものを取る．加藤和也氏により保型形式のゼータ関数に対応する zeta element

$${}_{c,d}z_N \in \varprojlim_n K_2(Y(p^n,Np^n))$$

([Ka2]) ([Sc] にも定義が掲載されている) が定義されている．また標準写像

$$\varprojlim_n K_2(Y(p^n,Np^n)) \longrightarrow \varprojlim_n K_2(O_{\mathsf{H}_n})[[G_\infty]]$$

が存在する ([Fu1] 参照)．この写像と自然な写像 $\varprojlim_n K_2(O_{\mathsf{H}_n})[[G_\infty]] \longrightarrow \varprojlim_n \hat{K}_2(O_{\mathsf{H}_n})[[G_\infty]]$ の合成による zeta element ${}_{c,d}z_N$ の像を，乗法群の場合の円単数の系に対応する我々の場合の zeta element とする．合成写像(3.2)により与えられる写像

$$\mathfrak{L} : \varprojlim_n \hat{K}_2(O_{\mathsf{H}_n})[[G_\infty]] \longrightarrow O_{\mathsf{H}}[[G_\infty]][[G_\infty]] = O_{\mathsf{H}}[[G_\infty \times G_\infty]]$$

にこの zeta element を適用する．

その像についてまず次の事が成り立つ.

命題 3.4.2 . $N=1$ の時次が成立する:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{L}({}_{c,d}z_1) &= (1-\sigma_{c,1})(1-\sigma_{d,2}) \\
&\cdot \Big(\sum_{\substack{i\geq 1 \\ (i,p)=1}} \sum_{j\geq 1} q^{ij}\sigma_{i,1} + \zeta_{p-\mathrm{adic},1} \Big) \Big(\sum_{\substack{l\geq 1 \\ (l,p)=1}} \sum_{m\geq 1} q^{lm}\sigma_{l,2} + \zeta_{p-\mathrm{adic},2} \Big).
\end{aligned}
$$

ここで, $a, b \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対し, $\sigma_{a,1}$ (*resp.* $\sigma_{b,2}$) は対応する第1 (*resp.*2) の G_∞ の元であり, $\zeta_{p-\mathrm{adic},1}$ (*resp.* $\zeta_{p-\mathrm{adic},2}$) は第1の (*resp.* 第2の)$G_\infty$ に対する p 進 *Riemann* ゼータ関数である.

注 3.4.3 . 命題3.4.2からわかる様に, $N=1$ の時, $\mathfrak{L}({}_{c,d}z_N)$ は (Λ 進 *Eisenstein* 級数)×(Λ 進 *Eisenstein* 級数) の形になっている. ([Hi3] 参照.) また命題においては簡単のために $N=1$ の時に結果を述べているが, 一般の N に対しても同様の事がいえる.

この様に像自体は p 進 L 関数ではないが, これは保型形式の p 進 L 関数を生み出す保型形式になっている. 以下で, この $\mathfrak{L}({}_{c,d}z_N) \in O_{\mathsf{H}}[[G_\infty \times G_\infty]]$ を用いて保型形式の p 進 L 関数を生み出す事についての結果を述べる.

3.4.4. まず $G_\infty^{(1)} = G_\infty^{(2)} = G_\infty (= \mathbb{Z}_p^\times)$ とする. 像 $\mathfrak{L}({}_{c,d}z_N)$ より下の様にして導かれる元を universal zeta modular form

$$
z_{Np^\infty}^{\mathrm{univ}} \in O_{\mathsf{H}}[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]][\frac{1}{g}]
$$

と呼ぶ. ここに $g \in \mathbb{Z}_p[[G_\infty^{(1)}]]$ はある非零因子である. universal zeta modular form は次のように特徴付けられる:

写像

$$
O_{\mathsf{H}}[[G_\infty \times G_\infty]] \xrightarrow{\cong} O_{\mathsf{H}}[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]] \ ;
$$

$$
x\sigma_{a,1}\sigma_{b,2} \mapsto x\sigma_a^{(1)}\sigma_b^{(2)}
$$

($x \in O_{\mathsf{H}}$, $\sigma_a^{(1)} \in G_\infty^{(1)}$, $\sigma_b^{(2)} \in G_\infty^{(2)}$), による $\mathfrak{L}({}_{c,d}z)$ の像が

$$
(1-\sigma_c^{(1)})(1-\sigma_{c^{-1}d}^{(2)})z_{Np^\infty}^{\mathrm{univ}}.
$$

K_2 版の Coleman 巾級数を用いて保型形式の p 進 L 関数を生み出す事についての主結果は, この universal zeta modular form $z_{Np^\infty}^{\mathrm{univ}}$ から保型形式の p 進 L 関数得られるという, 下に述べる定理3.6である. この定理を述べるための準備をする.

3.5. p 進保型形式の理論を振り返る.

3.5.1. 整数 $k \geq 2, M \geq 1$ と, $\mathbb{Q}$ の有限次拡大 $F \subset \bar{\mathbb{Q}}$ に対し, $M_k(X_1(M); F)$ を $\Gamma_1(M)$ に対する重み k の保型形式で Fourier 係数が F に入るものの空間とする. F の素元 λ について, F_λ を F の λ による完備化とする. そして,

$$M_k(X_1(M); F_\lambda) = M_k(X_1(M); F) \otimes_F F_\lambda,$$

$$M_k(X_1(M); O_{F_\lambda}) = M_k(X_1(M); F_\lambda) \cap O_{F_\lambda}[[q]]$$

と定義する. ここでは $M_k(X_1(M); F_\lambda)$ は Fourier 展開により $F_\lambda[[q]]$ の部分空間とみなされている. 更に $A = F_\lambda$ や O_{F_λ} について,

$$M_k(X_1(Np^\infty); A) = \bigcup_{t=1}^{\infty} M_k(X_1(Np^t); A)$$

とする.

また $\bar{M}_k(X_1(Np^\infty); O_{F_\lambda})$ を $M_k(X_1(Np^\infty); O_{F_\lambda}) \subset O_{F_\lambda}[[q]]$ の p 進 norm $|\ |_p$ による完備化とする.(これは $\mathbb{C}_p[[q]]$ に対し与えられる norm で, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \in \mathbb{C}_p[[q]]$ に対し,

$$|\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n|_p = \mathrm{Sup}_n |a_n|_p$$

と定められる. ここに $\mathbb{C}_p$ は $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包 $\overline{\mathbb{Q}_p}$ の p 進完備化, $|\ |_p$ は $|p|_p = p^{-1}$ なる $\mathbb{C}_p$ の p 進 norm である.) ([Hi1] 参照.)

$\bar{M}_k(X_1(Np^\infty); O_{F_\lambda})$ は重み $k \geq 2$ について独立である事が知られている. 従って, 省略して $\bar{M}(X_1(Np^\infty); O_{F_\lambda})$ と書く事にする. 更に

$$\bar{m}_{Np^\infty} = (\mathbb{Q}_p(\zeta_N) + \bar{M}(X_1(Np^\infty); \mathbb{Z}_p[\zeta_N]) / \mathbb{Q}_p(\zeta_N)$$

と定義する.

命題 3.5.2 .

$$z^{\mathrm{univ}}_{Np^\infty} \in \bar{m}_{Np^\infty}[[G^{(1)}_\infty \times G^{(2)}_\infty]][\frac{1}{g}],$$

ここに $g \in \mathbb{Z}_p[[G^{(2)}_\infty]]$ は 3.4.4 の非零因子である.

3.5.3. Hecke 作用素の環 H_{Np^∞} を次のように定義する. F_λ の部分環 A に対し, $H_k(X_1(M); A)$ を $M_k(X_1(M); F_\lambda)$ の A-線型自己準同型環の部分環で A 上 Hecke 作用素 $T(n)$ $(n \geq 1)$ で生成されるものとする. そして

$$H_k(X_1(Np^\infty); A) = \varprojlim_t H_k(X_1(Np^t); A),$$

$$H_{Np^\infty} = H_k(X_1(Np^\infty); \mathbb{Z}_p[\zeta_N])$$

と定める．この $H_k(X_1(Np^\infty); A)$ も重み $k \geq 2$ によらない事が知られている（[Hi1] 参照）ので k を省略して H_{Np^∞} と表記している．）環 H_{Np^∞} は空間 $\bar{m}_{Np^\infty}$ に作用している．更に $H^{\mathrm{ord}}_{Np^\infty}$ を H_{Np^∞} の ordinary part, $P^{\mathrm{ord}}_{Np^\infty}$ を N に関する $H^{\mathrm{ord}}_{Np^\infty}$ の primitive part とする（[Hi1], §3 参照).

定理 3.6 ([Fu2]). *universal zeta modular form* $z^{\mathrm{univ}}_{Np^\infty}$ は, *universal ordinary p-adic L function*

$$L^{\mathrm{ord,univ}}_{p\text{-}adic} \in P^{\mathrm{ord}}_{Np^\infty}[\frac{1}{h}][[G^{(2)}_\infty]][\frac{1}{g}]$$

という次の性質 (P) を満たすものを生み出す．ここに $h \in P^{\mathrm{ord}}_{Np^\infty}$, $g \in \mathbb{Z}_p[[G^{(1)}_\infty]]$ はある非零因子である．

(P) ある $t \geq 0$ についてレベル Np^t の *eigen cusp form* $f = \sum_{n\geq 1} a_n(f)q^n$ で下に述べる条件 $(*)$ を満たすものに対し，準同型

$$P^{\mathrm{ord}}_{Np^\infty} \longrightarrow \overline{\mathbb{Z}_p}\ ;\ T(n) \mapsto a_n \tag{3.3}$$

による $L^{\mathrm{ord,univ}}_{p\text{-}adic}$ の像が f の p 進 L 関数 $L_{p\text{-}adic}(f) \in (O_M[[G^{(2)}_\infty]]) \otimes_{O_M} M$ (*Amice-Vélu* [AV], *Vishik* [Vi]) になる．ここに M は $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体 $M = \mathbb{Q}_p(a_n; n \geq 1)$ である．

上述の条件 $(*)$ について述べる．

群 $G^{(1)}_\infty$ は実は $\bar{m}_{Np^\infty}$ に作用する *diamond operator* の群とみなせるので，従って $G^{(1)}_\infty \subset H_{Np^\infty}$ がいえる．

上述の条件 $(*)$ とは

$(*)$ f に対応する準同型(3.3) が上の g, h を消さない *ordinary eigen cusp form* f．(*ordinary* については [Hi1] 参照．)

注 3.6.1．この $L^{\mathrm{ord,univ}}_{p\text{-}adic}$ は，肥田氏による *ordinary* Λ 進保型形式 ([Hi1], [Hi2] 参照) に対応する 2 変数 p 進 L 関数である．*Greenberg-Stevens* 両氏 ([GS])，北川氏 ([Ki]) によって既に 2 変数 p 進 L 関数は与えられているが，この $L^{\mathrm{ord,univ}}_{p\text{-}adic}$ は係数が *Hecke* 環となっているところが，*universal* な点である．

また加藤氏の *zeta element* から 2 変数 p 進 L 関数を得る結果には，落合氏 ([Oc]) による別の方法もある．

注 3.6.2．正確には $k = 2$ の時，条件 $(*)$ を満たす f の，複素ゼータ関数の $s = 1$ での値が 0 になる場合には，$L_{p\text{-}adic}(f)$ は準同型(3.3) ではなくもう一工夫加えた準同型によって与えられるが，詳細は略させていただいた．

注 3.7 . *ordinary* とは限らない *eigen cusp form* f の p 進 L 関数 $L_{p\text{-}adic}(f)$ も *universal zeta modular form* $z_{Np^\infty}^{\mathrm{univ}}$ から得られるが，この詳細についてはここでは述べない．作成中の [Fu2] に述べたい．

3.8 最後に定理3.7に述べた $z_{Np^\infty}^{\mathrm{univ}}$ による $L_{p\text{-adic}}^{\mathrm{ord,univ}}$ の与え方を記す．

3.8.1 肥田氏 ([Hi1]) により $\mathbb{Z}_p[\zeta_N]$ 加群としての双対

$$\bar{m}_{Np^\infty} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[\zeta_N]}(H_{Np^\infty},\ \mathbb{Z}_p[\zeta_N])$$

が pairing

$$\bar{m}_{Np^\infty} \times H_{Np^\infty} \longrightarrow \mathbb{Z}_p[\zeta_N]\ ;\ (f = \sum_{n\geq 0} a_n(f)q^n,\ T) \mapsto a_1(Tf),$$

によって与えられている．

従って，標準同型

$$(3.4)\quad \bar{m}_{Np^\infty}[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]][\frac{1}{g}] \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[\zeta_N]}(H_{Np^\infty},\ \mathbb{Z}_p[\zeta_N])[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]][\frac{1}{g}]$$

が存在する．universal zeta modular form $z_{Np^\infty}^{\mathrm{univ}}$ はこの(3.4) の両辺に含まれるが，特に次の事がいえる．

命題 3.8.2 . $\Lambda = \mathbb{Z}_p[\zeta_N][[G_\infty^{(1)}]]$ とおく．この時次が成立する．

$$z_{Np^\infty}^{\mathrm{univ}} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(H_{Np^\infty},\ \Lambda)[[G_\infty^{(2)}]][\frac{1}{g}]$$
$$(\subset \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[\zeta_N]}(H_{Np^\infty},\ \mathbb{Z}_p[\zeta_N])[[G_\infty^{(1)} \times G_\infty^{(2)}]][\frac{1}{g}]).$$

ここで，$\mathrm{Hom}_\Lambda(\ ,\ )$ は Λ 加群としての準同型である．

3.8.3 universal ordinary p-adic L function $L_{p\text{-adic}}^{\mathrm{ord,univ}}$ は次の合成写像による $z_{Np^\infty}^{\mathrm{univ}}$ の像である．

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(H_{Np^\infty},\ \Lambda)[[G_\infty^{(2)}]][\frac{1}{g}] \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Lambda(P_{Np^\infty}^{\mathrm{ord}},\ \Lambda)[[G_\infty^{(2)}]][\frac{1}{g}]$$
$$\longrightarrow P_{Np^\infty}^{\mathrm{ord}}[\frac{1}{h}][[G_\infty^{(2)}]][\frac{1}{g}].$$

最初の写像は自然な写像である．ふたつめの写像は次のようにして与えられる．

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(P^{\mathrm{ord}}_{Np^\infty},\ \Lambda) \longrightarrow P^{\mathrm{ord}}_{Np^\infty} \otimes_\Lambda Q(\Lambda)\ ;\ \psi \mapsto a.$$

ここに $Q(\Lambda)$ は Λ の全商環であり，$a \in P^{\mathrm{ord}}_{Np^\infty} \otimes_\Lambda Q(\Lambda)$ は次を満たす元である：

$$\psi(x) = \mathrm{T}(ax) \in Q(\Lambda) \quad (x \in P^{\mathrm{ord}}_{Np^\infty}).$$

写像 T は，Trace 写像

$$\mathrm{T} : P^{\mathrm{ord}}_{Np^\infty} \otimes_\Lambda Q(\Lambda) \longrightarrow Q(\Lambda)$$

である．

こうして $z^{\mathrm{univ}}_{Np^\infty}$ により $L^{\mathrm{ord,univ}}_{p\text{-adic}}$ が得られた．

REFERENCES

[AV] AMICE, Y., and VÉLU, J., *Distributions p-adiques associées aux séries de Hecke*, Astérisque **24-25**(1975) 119–131.

[Co] COLEMAN, R., *Division values in local fields*, Invent. Math. **53** (1979) 91–116.

[Fu1] FUKAYA, T., *The theory of Coleman power series for K_2*, preprint.

[Fu2] FUKAYA, T., *K_2-version of Coleman power series and p-adic zeta functions of modular forms*, in preparation.

[GS] GREENBERG, R. and STEVENS, G., *p-adic L functions and p-adic periods of modular forms*, Invent. Math. **111** (1993) 407–447.

[Hi1] HIDA, H., *Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **19** (1986) 231–273.

[Hi2] HIDA, H., *Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math. **85** (1986) 545–613.

[Hi3] HIDA, H., *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, London Math. Soc. Student Texts **26** (1993).

[Iw] IWASAWA, K., *Lectures on p-adic L-functions*, Annals of Math. Studies **74** Prinston Univ. Press (1972).

[Ka1] KATO, K., *Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}*, Lecture Notes in Math. **1553**, Springer (1993) 50–163.

[Ka2] KATO, K., *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, to appear in Astérisque.

[Ki] KITAGAWA, K., *On standard p-adic L-functions of families of elliptic cusp forms*, Contemp. Math., **165** (1991) 81–110.

[Oc] OCHIAI, T., *Coleman map for Hida deformations*, Doctoral Thesis, University of Tokyo (2001).

[Qu] QUILLEN, D., *Higher algebraic K-theory* I, Lecture Notes in Math. **342**, Springer (1973) 179–198.

[Sc] SCHOLL, J., *An introduction to Kato's Euler systems*, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **254**, Cambridge Univ. Press (1998) 379–460.

[Vi] VISHIK, M., M., *Non-archimedean measures connected with Dirichlet series*, Math. USSR, Sbornik **28** (1976) 216–228.

153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1

E-mail address: `takako@ms357.ms.u-tokyo.ac.jp`